

# MODELAGEM MATEMÁTICA: MOVIMENTO COM RESISTÊNCIA DO AR PROPORCIONAL À VELOCIDADE

Matheus Bernardi da Silva<sup>1</sup>  
Dyorgyo Pompermaier Valesan<sup>2</sup>  
Karen Carrilho da Silva Lira<sup>3</sup>  
Gustavo Henrique Dalposso<sup>4</sup>

## RESUMO

O presente trabalho trata-se de uma modelagem matemática de um movimento com resistência do ar proporcional à velocidade, e sob influência da aceleração gravitacional da Terra. Vamos analisar situações de quedas e de lançamentos oblíquos. Com isso, deduziremos as equações do movimento do corpo, e discutiremos pontos interessantes dos resultados obtidos.

Palavras-chave: Equações diferenciais. Modelagem matemática. Newton-Raphson. Resistência do ar. Velocidade terminal.

---

<sup>1</sup>Graduando em Engenharia Eletrônica. Universidade Tecnológica Federal do Paraná/Toledo.  
E-mail: mbernardi.s@protonmail.ch

<sup>2</sup>Graduando em Engenharia Eletrônica. Universidade Tecnológica Federal do Paraná/Toledo.  
E-mail: dyorgyo@alunos.utfpr.edu.br

<sup>3</sup>Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná/Toledo. Mestre em Engenharia Civil.  
E-mail: karenc@utfpr.edu.br

<sup>4</sup>Matemático. Universidade Tecnológica Federal do Paraná/Toledo. Doutor em Engenharia Agrícola.  
E-mail: gustavodalposso@utfpr.edu.br

# 1 Introdução

Um problema frequentemente visto em física, tanto no ensino médio quanto na faculdade, nas matérias de física básica, é a queda ou o lançamento de corpos sem o atrito com ar. Este modelo porém, é extremamente idealizado e ineficiente para explicar fatos cotidianos, como a velocidade terminal da chuva quando chega ao solo por exemplo. Uma gota de chuva sob aceleração de  $9,81 \text{ m/s}^2$  (supondo-se que a aceleração gravitacional não varie com a distância do solo), caindo de uma altura de 10 quilômetros atingiria o solo a velocidade supersônica de 1594 km/h. O foco desse trabalho é a obtenção de uma equação diferencial que modele o fenômeno de movimento com atrito com o ar, e explorar conceitos do cálculo diferencial e integral e da física para discutirmos a respeito das expressões obtidas. Para isso, convencionaremos agora que os fenômenos discutidos ocorrem no primeiro e no segundo quadrante do plano cartesiano, seguindo as orientações dos eixos coordenados (o eixo das abscissas é positivo para a direita e possui versor  $\hat{i}$  nesse sentido, e o das ordenadas é positivo para cima e possui versor  $\hat{j}$  nesse sentido).

## 2 Modelando o fenômeno

Inicialmente, vamos considerar um determinado corpo que cai de uma altura  $y_0$ . Consideramos a velocidade do corpo representada pelo vetor  $\mathbf{v}$ . Nesse caso as forças que estão agindo sobre esse corpo são a força peso  $\mathbf{P}$  e a força de atrito com o ar  $\mathbf{F}$ . A força peso que age sobre esse corpo é

$$\mathbf{P} = m\mathbf{a}_g.$$

Vamos considerar o módulo do vetor aceleração gravitacional  $\mathbf{a}_g$  constante e igual a  $9,81 \text{ m/s}^2$ , e  $g$  como uma constante positiva igual a  $9,81 \text{ m/s}^2$ . Assim, o vetor aceleração gravitacional é  $\mathbf{a}_g = -g\hat{j}$ . A força de atrito com o ar  $\mathbf{F}$ , caracteriza-se por ser na mesma direção e no sentido oposto ao da velocidade, e é em módulo, diretamente proporcional à ela

$$\|\mathbf{F}\| \propto \|\mathbf{v}\|, \quad (1)$$

e portanto podemos escrever a força de atrito com o ar como

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{v}, \quad (2)$$

onde  $k$  é uma contante de proporcionalidade positiva e  $\mathbf{v}$  o vetor velocidade. Assim, sempre que a velocidade for positiva (sentido positivo do eixo), a força  $\mathbf{F}$  apontará no

sentido negativo, e sempre que a velocidade for negativa (sentido negativo do eixo), a força  $F$  apontará no sentido positivo.

De acordo com a Segunda Lei de Newton (Halliday et al., 2012), a força resultante em um corpo é a soma das forças aplicadas nele, o que equivale a variação temporal do momento linear  $Q$

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \frac{d\mathbf{Q}}{dt}, \quad (3)$$

que é equivalente a

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \quad (4)$$

pois estamos considerando que a massa do corpo não varia no tempo. Assim, a equação 4 ficará

$$\mathbf{F} + \mathbf{P} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \quad (5)$$

que pode finalmente ser escrita como

$$\begin{aligned} mv' &= -mg - kv, \\ v' + \frac{k}{m}v &= -g, \end{aligned} \quad (6)$$

que ao ser resolvida fornecerá uma equação para a velocidade.

Consideramos até esse ponto uma queda de uma altura  $y_0$ . Poderíamos desenvolver um raciocínio análogo no eixo  $x$ , caso a velocidade horizontal inicial fosse diferente de zero. Nesse caso, pela Segunda Lei de Newton temos

$$\begin{aligned} mv' &= -kv, \\ v' + \frac{k}{m}v &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

que para não gerar confusão com a equação 6, será representada por

$$v'_x + \frac{k_x}{m}v_x = 0, \quad (8)$$

onde  $k_x$  é a constante de proporcionalidade que relaciona a velocidade horizontal ( $\mathbf{v}_x$ ) com a força de atrito com o ar na horizontal

$$\mathbf{F}_x = -k_x \mathbf{v}_x, \quad (9)$$

O mesmo será feito para o movimento vertical. Assim a equação 6 ficará

$$v'_y + \frac{k_y}{m}v_y = -g, \quad (10)$$

sendo  $k_y$  a constante de proporcionalidade que relaciona a velocidade vertical ( $\mathbf{v}_y$ ) com a força de atrito com o ar na vertical

$$\mathbf{F}_y = -k_y \mathbf{v}_y. \quad (11)$$

É importante ressaltar que, apesar de termos inicialmente analisado um movimento de queda, poderíamos analisar um lançamento oblíquo. Nesse caso, o corpo possui uma velocidade inicial de módulo  $v_0$  formando um ângulo  $\theta$  com o eixo x, e assim

$$\begin{aligned} v_{0x} &= v_0 \cos(\theta), \\ v_{0y} &= v_0 \sin(\theta) > 0, \end{aligned}$$

e se procedermos de maneira análoga ao que fizemos até agora, encontraríamos as mesmas equações diferenciais que 8 e 10 para um lançamento oblíquo.

### 3 Equações do movimento

A resolução das equações diferenciais obtidas em 8 e 10 fornece-nos as equações da velocidade nos eixos x e y, e que podemos utilizar para calcular as equações da aceleração e do espaço.

#### 3.1 Equações da velocidade

A equação 8 é homogênea, e pode ser resolvida através de sua equação característica (Zill, 2012)

$$\begin{aligned} w + \frac{k_x}{m} &= 0, \\ w &= -\frac{k_x}{m}, \end{aligned} \quad (12)$$

e portanto, a solução da equação 8 será

$$\begin{aligned} v_x &= c_1 e^{wt}, \\ v_x &= c_1 e^{-\frac{k_x t}{m}}, \end{aligned} \quad (13)$$

aplicando o valor inicial  $v_x(0) = v_{0x}$ , temos

$$\begin{aligned} c_1 &= v_{0x}, \\ v_x(t) &= v_{0x} e^{-\frac{k_x t}{m}}. \end{aligned} \quad (14)$$

A equação 10, por se tratar de uma equação diferencial linear, pode ser resolvida multiplicando-se ambos os lados pelo fator de integração  $\mu$  (Zill, 2012)

$$\mu(t) = e^{\frac{k_y t}{m}},$$

assim, a equação 10 ficará

$$v_y' \mu + \frac{k_y}{m} v_y \mu = -g \mu, \quad (15)$$

que é a mesma coisa que

$$\frac{d}{dt}(v_y \mu) = -g \mu, \quad (16)$$

que finalmente, ao ser resolvida fornece uma expressão de  $v_y$  em função de  $t$ :

$$v_y = -\frac{mg}{k_y} + c_2 e^{-\frac{k_y t}{m}}, \quad (17)$$

Aplicando o valor inicial  $v_y(0) = v_{0y}$ , temos

$$c_2 = v_{0y} + \frac{mg}{k_y},$$

$$v_y(t) = -\frac{mg}{k_y} + \left( v_{0y} + \frac{mg}{k_y} \right) e^{-\frac{k_y t}{m}}. \quad (18)$$

Finalmente, o vetor velocidade  $\mathbf{v}$  é dado pela combinação linear

$$\mathbf{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j},$$

e possui módulo

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

### 3.2 Equações da aceleração

Sabendo-se as equações da velocidade, e sabendo que a variação temporal da velocidade é a aceleração (Halliday et al., 2012), podemos deduzir  $a_x(t)$  e  $a_y(t)$ :

$$a_x(t) = \frac{d}{dt} v_x(t),$$

$$a_y(t) = \frac{d}{dt} v_y(t),$$

$$a_x(t) = -\frac{k_x v_{0x}}{m} e^{-\frac{k_x t}{m}}, \quad (19)$$

$$a_y(t) = -\left( \frac{k_y v_{0y}}{m} + g \right) e^{-\frac{k_y t}{m}}. \quad (20)$$

### 3.3 Equações do espaço

Como sabemos as equações das velocidades, se as integrarmos encontraremos as equações do espaço (Halliday et al., 2012). Para isso, devemos apenas nos atentarmos aos valores iniciais  $y(0) = y_0$  e  $x(0) = x_0$ . Assim, temos que:

$$\begin{aligned} \int x' dt &= \int v_x dt, \\ \int y' dt &= \int v_y dt, \\ x &= -\frac{mv_{0x}}{k_x} e^{-\frac{k_x t}{m}} + c_3, \\ y &= -\frac{mgt}{k_y} - \frac{mv_{0y}}{k_y} e^{-\frac{k_y t}{m}} - \frac{m^2 g}{k_y^2} e^{-\frac{k_y t}{m}} + c_4, \end{aligned}$$

Finalmente, ao aplicarmos os valores iniciais encontramos:

$$\begin{aligned} c_3 &= x_0 + \frac{mv_{0x}}{k_x}, \\ c_4 &= y_0 + \frac{mv_{0y}}{k_y} + \frac{m^2 g}{k_y^2}, \\ x &= x_0 + \frac{mv_{0x}}{k_x} \left( 1 - e^{-\frac{k_x t}{m}} \right), \end{aligned} \quad (21)$$

$$y = y_0 - \frac{mgt}{k_y} + \left( v_{0y} + \frac{mg}{k_y} \right) \left( \frac{m - me^{-\frac{k_y t}{m}}}{k_y} \right), \quad (22)$$

## 4 Análise dimensional

Como definimos anteriormente,  $F = -k\mathbf{v}$ . A análise dimensional dessa equação nos permite concluir que

$$[k] = \frac{kg}{s},$$

e assim podemos agora analisar os resultados obtidos nas equações 14, 18, 19, 20, 21 e 22.

### 4.1 Análise dimensional das equações da velocidade

Na fórmula 14, verifica-se que

$$e^{-\frac{k_x t}{m}},$$

é adimensional, e portanto a dimensão da expressão 14 é a mesma de  $v_{0x}$ , ou seja, m/s. Assim, os valores fornecidos pela equação 14 estão dimensionalmente corretos. O mesmo pode ser feito para a equação 18:

$$\left[ \frac{mg}{k_y} \right] = \frac{m}{s},$$

$$\left[ \left( v_{0y} + \frac{mg}{k_y} \right) e^{-\frac{k_y t}{m}} \right] = \frac{m}{s},$$

e assim concluímos que a dimensão da expressão 18 é m/s, e ela também está correta dimensionalmente.

## 4.2 Análise dimensional das equações da aceleração

Verifica-se nas fórmulas 19 e 20 que

$$\left[ \frac{k_x v_{0x}}{m} \right] = \frac{m}{s^2},$$

$$\left[ \frac{k_y v_{0x}}{m} \right] = \frac{m}{s^2},$$

$$[g] = \frac{m}{s^2},$$

e portanto, ambas as expressões fornecem valores consistentes dimensionalmente, em  $m/s^2$ .

## 4.3 Análise dimensional das equações do espaço

Verifica-se nas fórmulas 21 e 22 que

$$\left[ \frac{mv_{0x}}{k_x} \right] = m,$$

$$\left[ \frac{mgt}{k_y} \right] = m,$$

$$\left[ \left( v_{0y} + \frac{mg}{k_y} \right) \left( \frac{m - m e^{-\frac{k_y t}{m}}}{k_y} \right) \right] = m,$$

e portanto, ambas as expressões fornecem valores consistentes dimensionalmente.

## 5 Discussões sobre os resultados obtidos

Sabemos agora que as equações fornecem valores consistentes dimensionalmente. Vamos então analisar o comportamento das equações em algumas condições.

## 5.1 Instante inicial

No instante inicial (quando  $t = 0$ ), sabemos que as fórmulas 14, 18, 21 e 22 vão fornecer os valores iniciais estabelecidos nas seções 3.1 e 3.3. Porém é interessante notar o comportamento das equações 19 e 20, que ainda não foram analisadas nesses instantes de tempo. Para  $t = 0$ , temos que  $a_x$  é

$$a_x(0) = a_{0x} = -\frac{k_x v_{0y}}{m} = \pm \frac{\|\mathbf{F}_x(0)\|}{m},$$

o que era justamente o esperado pela Segunda Lei de Newton. O sinal da componente  $a_x$  no instante inicial será positivo ou negativo, dependendo da orientação de  $\mathbf{F}_x(0)$ . Para  $a_y$  temos

$$a_y(0) = a_{0y} = -\frac{k_y v_{0y}}{m} - g = \pm \frac{\|\mathbf{F}_y(0) + \mathbf{P}\|}{m},$$

o que novamente era o esperado pela Segunda Lei de Newton. O sinal da componente  $a_y$  no instante inicial será positivo ou negativo, dependendo da orientação de  $\mathbf{F}_y(0) + \mathbf{P}$ .

## 5.2 Velocidade terminal

Retomando o problema visto na introdução, sabemos que uma gota de chuva atinge o solo a bem menos que 1594 km/h, um pouco acima de 30 km/h<sup>5</sup>. Isso parece indicar que, para intervalos muito grandes de tempo, a variação da velocidade tende a zero, e portanto, o corpo tende a realizar um movimento retilíneo uniforme no eixo  $y$ . De fato

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a_y(t) = 0, \quad (23)$$

o que significa que a velocidade terminal  $v_f$  será

$$v_f = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{v}_y(t) = -\frac{mg}{k_y}. \quad (24)$$

O exemplo apresentado na Figura 1 permite visualizar melhor o comportamento de  $v_y(t)$ . Como a velocidade terminal só é atingida numa situação de queda, o sinal de menos na equação 24 é correto, pois na convenção que definimos na introdução, nessa situação o movimento do corpo está orientado no sentido negativo do eixo  $y$ , e portanto  $v_f$  é negativo.

---

<sup>5</sup>Considerando uma gota esférica de aproximadamente 4 mm de diâmetro (Battan, 1964).



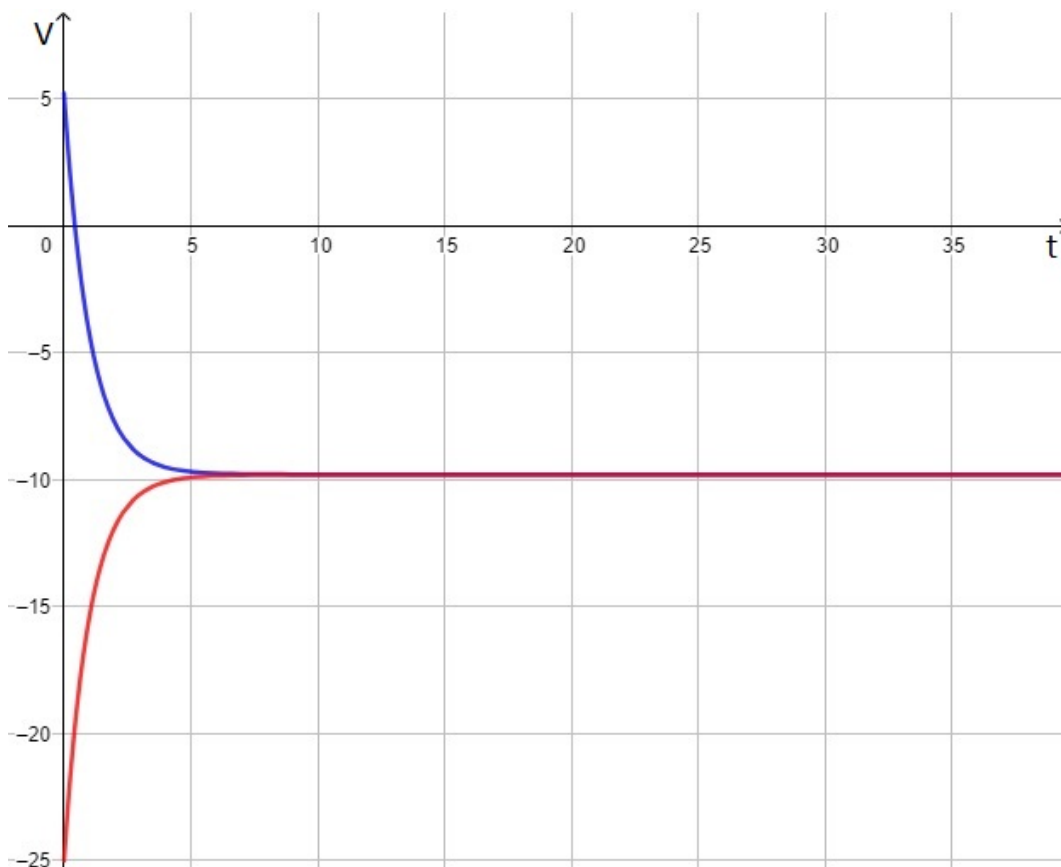


Figura 1: Curvas  $v_y(t)$  de um lançamento oblíquo e de uma queda de um corpo de massa de 1 kg e  $k = 1$ . A curva superior, em azul, representa um lançamento oblíquo com  $v_0 = 6$  m/s e  $\theta = 60^\circ$ . A curva inferior, em vermelho, representa uma queda com  $v_{0y} = -25$  m/s. Fonte: Autores.

Como nessa situação  $a_y = 0$ , o movimento realizado pelo corpo é um MRU, e então a força resultante tem que ser nula. Assim, a força de resistência do ar tem que ter módulo igual à força peso. De fato

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_y &= -k_y v_f \hat{j}, \\ \mathbf{F}_y &= -k_y \left( -\frac{mg}{k_y} \right) \hat{j}, \\ \mathbf{F}_y &= mg \hat{j}, \\ \|\mathbf{F}_y\| &= \|\mathbf{P}\| = mg. \end{aligned}$$

### 5.3 Ausência de resistência do ar

Um ponto interessante é o comportamento ideal das equações, isto é, o caso em que o movimento ocorre sem resistência do ar, ou seja, quando  $k = 0$ .

### 5.3.1 Movimento horizontal

No caso do movimento horizontal sem resistência do ar, não haverão forças agindo sobre o corpo na horizontal, o que torna o movimento retilíneo e uniforme. Nesse caso, de acordo com Halliday et al.,(2012), espera-se que

$$\begin{aligned}a_x(t) &= 0, \\v_x(t) &= v_{0x}, \\x(t) &= x_0 + v_{0x}t,\end{aligned}$$

É fácil verificar que, para  $k = 0$ , a equação 14 torna-se igual a  $v_{0x}$  e a equação 19 torna-se igual a 0. Para a equação 21 devemos atentar para o fato de que não existe divisão por zero, e portanto  $k_x \neq 0$ . Nesse caso, podemos utilizar nossos conhecimentos de limite para solucionar esse problema

$$x = x_0 + mv_{0x} \lim_{k_x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\frac{k_x t}{m}}}{k_x},$$

e aplicado L'Hôpital

$$\begin{aligned}x &= x_0 + mv_{0x} \lim_{k_x \rightarrow 0} \frac{t - \frac{k_x t}{m}}{k_x}, \\x(t) &= x_0 + v_{0x}t.\end{aligned}$$

### 5.3.2 Movimento vertical

Nesse caso, de acordo com Halliday et al., (2012), espera-se que

$$\begin{aligned}a_y(t) &= -g, \\v_y(t) &= v_{0y} - gt, \\y(t) &= y_0 + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}.\end{aligned}$$

De formar análoga ao que foi feito em 5.3.1, é fácil perceber que para  $k_y = 0$ , a expressão 20 torna-se  $a_y = -g$ . Para  $v_y$ , devemos novamente fazer  $k_y$  tender à zero

$$v_y = v_{0y} + mg \lim_{k_y \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{k_y t}{m}} - 1}{k_y}. \quad (25)$$

Aplicando a regra de L'Hôpital, concluímos que a expressão 18 torna-se

$$v_y = v_{0y} - gt. \quad (26)$$

Para determinarmos  $y(t)$  quando  $k_y = 0$ , podemos proceder de maneira análoga aos exemplos anteriores, realizando algumas manipulações matemáticas quando necessário. A equação 22 pode ser re-organizada como

$$y = y_0 - \frac{mgt}{k_y} + \frac{m}{k_y}v_{0y} \left( 1 - e^{-\frac{k_y t}{m}} \right) + \frac{m^2 g}{k_y^2} \left( 1 - e^{-\frac{k_y t}{m}} \right). \quad (27)$$

O termo

$$\frac{mgt}{k_y}$$

pode ser manipulado multiplicando-se por  $k_y$  e por  $m$ , no numerador e no denominador, e assim

$$\frac{mgt}{k_y} = \frac{m^2 g t k_y}{m k_y^2}$$

e portanto a expressão 27 torna-se

$$y = y_0 + \frac{m}{k_y}v_{0y} \left( 1 - e^{-\frac{k_y t}{m}} \right) + \frac{m^2 g}{k_y^2} \left( 1 - e^{-\frac{k_y t}{m}} - \frac{t k_y}{m} \right). \quad (28)$$

Agora, fazendo  $k_y$  tender à zero e aplicando a regra de L'Hôpital quando necessário, a expressão 28 torna-se

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t + \lim_{k_y \rightarrow 0} \frac{m^2 g}{k_y^2} \left( 1 - e^{-\frac{k_y t}{m}} - \frac{t k_y}{m} \right), \quad (29)$$

que resolvendo o limite dentro da expressão

$$\begin{aligned} \lim_{k_y \rightarrow 0} \frac{m^2 g}{k_y^2} \left( 1 - e^{-\frac{k_y t}{m}} - \frac{t k_y}{m} \right) &= \\ \lim_{k_y \rightarrow 0} \frac{m^2 g}{2k_y} \left( \frac{t}{m} e^{-\frac{k_y t}{m}} - \frac{t}{m} \right) &= \\ \lim_{k_y \rightarrow 0} \frac{mgt}{2k_y} \left( e^{-\frac{k_y t}{m}} - 1 \right) &= \\ \lim_{k_y \rightarrow 0} \frac{mgt}{2} \left( -\frac{t}{m} e^{-\frac{k_y t}{m}} \right) &= -\frac{gt^2}{2}, \end{aligned}$$

fornece finalmente que

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}. \quad (30)$$

## 6 Tempo de queda e alcance

Um dado útil em lançamentos oblíquos é o alcance do corpo lançado. Para calculá-lo, precisamos antes saber quanto tempo leva para o corpo sair da posição inicial e tocar o solo.

### 6.1 Tempo de queda

Vamos chamar de tempo de queda  $t_q$ , o tempo necessário para o corpo sair da posição  $y = y_0$  e tocar o chão em  $y = 0$ . Podemos rearranjar a equação 22 como

$$y = y_0 - \frac{mgt}{k_y} + \left( \frac{mv_{0y}k_y + m^2g}{k_y^2} \right) \left( 1 - e^{-\frac{k_y t}{m}} \right), \quad (31)$$

e nessa equação tornar  $y = 0$  e  $t = t_q$

$$0 = y_0 - \frac{mgt_q}{k_y} + \left( \frac{mv_{0y}k_y + m^2g}{k_y^2} \right) \left( 1 - e^{-\frac{k_y t_q}{m}} \right),$$
$$t_q = \frac{k_y}{mg} y_0 + \left( \frac{v_{0y}k_y + mg}{gk_y} \right) \left( 1 - e^{-\frac{k_y t_q}{m}} \right), \quad (32)$$

e assim chegamos a uma equação transcendental, que não nos permite isolar o  $t_q$ .

Uma maneira mais fácil de resolver essa equação, com uma precisão tão grande quanto nós queiramos, é utilizar um método numérico. Vamos utilizar o método de Newton-Raphson (Ruggiero & Lopes, 1996), fazendo uma análise a partir da interpretação geométrica do método, apresentada na Figura 2.

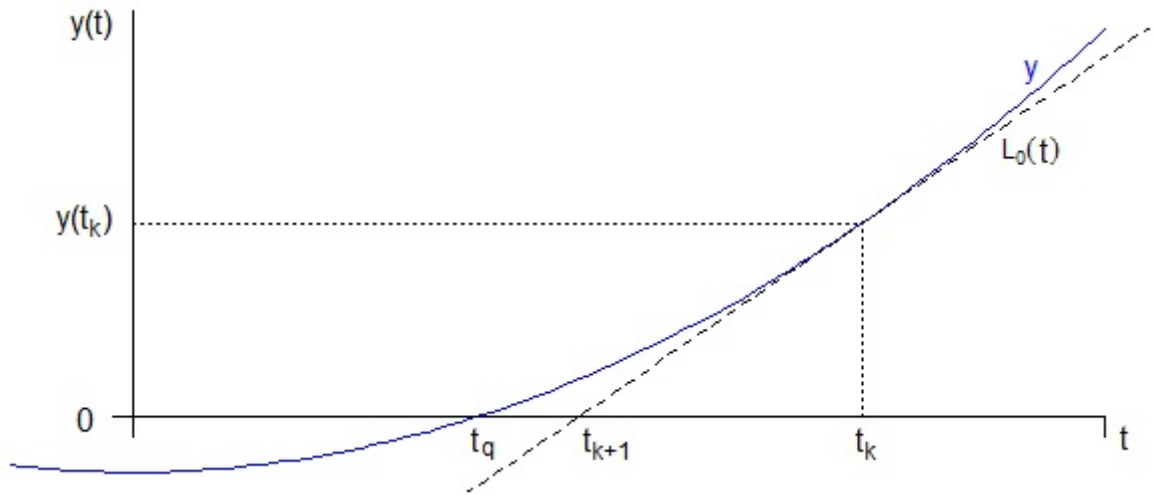


Figura 2: Interpretação geométrica do Método de Newton-Raphson.  $L_0(t)$  é a reta tangente à  $y(t)$  em  $y(t_k)$ , e  $t_q$  é a raiz de  $y(t)$ , ou seja, o tempo de queda. A cada iteração,  $t_{k+1}$  se aproxima mais de  $t_q$ . Fonte: Autores.

A reta  $L_0(t)$  possui como coeficiente angular a derivada de  $y(t)$  no instante  $t_n$ . Como  $y'(t)$  é a velocidade vertical, então

$$v_y(t_n) = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{t_{n+1} - t_n}. \quad (33)$$

Agora impondo à equação 33 que  $y(t_{n+1}) = 0$ , encontramos

$$v_y(t_n) = \frac{-y(t_n)}{t_{n+1} - t_n},$$

o que rearranjando, nos fornece finalmente que

$$t_{n+1} = t_n - \frac{y(t_n)}{v_y(t_n)}. \quad (34)$$

Assim,  $t_q$  será aproximadamente igual à  $t_{n+1}$ , sendo  $t_{n+1}$  uma aproximação tão precisa quanto desejado, bastando para isso estipular um erro  $\varepsilon$ , impor que  $|y(t_{n+1})| < \varepsilon$ , e por fim realizar tantas iterações quantas forem necessárias para cumprir a condição imposta anteriormente.

Devemos ainda, ter algum cuidado com a equação 34 para atingirmos o resultado pretendido. Nessa expressão temos que  $v_y(t)$  tem que ser diferente de 0. Vamos então denominar  $t_p$  o instante tal que  $v_y(t_p) = 0$ . Assim, substituindo na equação 18, temos que

$$0 = -\frac{mg}{k_y} + \left( v_{0y} + \frac{mg}{k_y} \right) e^{-\frac{k_y t_p}{m}},$$

e portanto

$$t_p = \frac{m}{k_y} \ln \left( \frac{k_y v_{0y} + mg}{mg} \right). \quad (35)$$

Quando  $k_y = 0$ , basta aplicar o limite de  $t_p$  com  $k_y$  tendendo a zero. Com isso, surgirá a indeterminação  $\frac{0}{0}$ , que pode ser contornada utilizando L'Hôpital, e assim, concluímos que

$$t_p = \frac{v_{0y}}{g}.$$

É interessante notar que, analisando a equação da velocidade  $v_y(t)$ , concluímos que

$$\begin{aligned} t < t_p, v_y(t) > 0, \\ t > t_p, v_y(t) < 0. \end{aligned}$$

Isso mostra que a velocidade vertical do corpo lançado, inicialmente igual a  $v_{0y}$ , diminui em módulo até atingir 0 (em  $t = t_p$ ), o que ocorre no ponto mais alto da trajetória no caso de um lançamento oblíquo (Tipler & Mosca, 2006). Em seguida, o sentido de  $v_y$  se inverte, e o módulo passa a aumentar até o corpo chegar ao solo no instante  $t_q$ .

Precisamos também, analisar um problema não trivial que surge ao utilizarmos o método de Newton-Raphson para a resolução desse problema. Dependendo da aproximação inicial  $t_0$  que fizermos, poderemos obter uma sequência que converge para um valor diferente de  $t_q$ . Vamos então analisar as condições de convergência desse método (Ruggiero & Lopes, 1996). Como o sinal da função  $v_y(t)$  permanece inalterado (sempre negativo) para  $t > t_p$  e  $y(t_1)y(t_2) < 0$  para  $0 < t_1 < t_q$  e  $t_2 > t_q$ , então existe apenas uma raiz de  $y(t)$  no intervalo  $(t_p, +\infty)$ , que é a raiz  $t_q$  que procuramos. Temos ainda que  $y(t)$ ,  $v_y(t)$ <sup>6</sup> e  $a_y(t)$ <sup>7</sup> são contínuas no intervalo  $(t_p, +\infty)$ , e que  $v_y(t_q)$  é diferente de zero ( $v_y(t)$  é zero para  $t = t_p$ ). Assim, concluímos que existe um intervalo  $I \subset (t_p, +\infty)$ , que contém a raiz  $t_q$ , tal que para qualquer  $t_0 \in I$ , a expressão 34 gerará uma sequência convergente. De modo geral, bastará escolhermos um  $t_0$  suficientemente próximo de  $t_q$  para obtermos uma sequência convergente. Isso torna necessário que, muitas vezes, seja construído um gráfico de  $y(t)$  para visualizarmos uma boa aproximação inicial  $t_0$ .

## 6.2 Alcance

Chamaremos de alcance  $A$  a distância entre  $x_0$  e o ponto de queda do corpo lançado, que toca o solo em  $x(t_q)$ . Assim, aplicando  $t_q$  em  $x(t)$  e subtraindo  $x_0$ , temos:

$$A = x(t_q) - x(0) = \frac{mv_{0x}}{k_x} \left( 1 - e^{-\frac{k_x t_q}{m}} \right). \quad (36)$$

---

<sup>6</sup> $v_y$  é a derivada primeira de  $y(t)$ .

<sup>7</sup> $a_y$  é a derivada segunda de  $y(t)$ .

A Figura 3 abaixo, ilustra os diferentes alcances esperados de corpos de massa 1 kg lançados da origem com velocidades iniciais de 6 m/s, ângulo  $\theta = 60^\circ$ , e considerando em todos os lançamentos  $k_x = k_y = k$ .

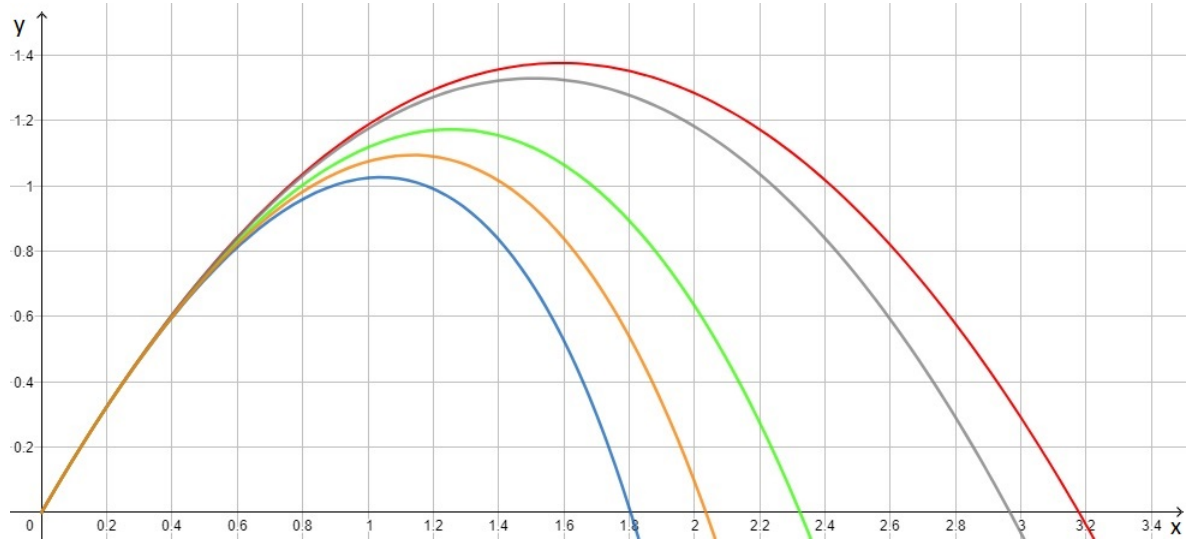


Figura 3: Curvas parametrizadas em função do tempo ( $x(t)$  e  $y(t)$ ) de cinco corpos diferentes de mesma massa e coeficientes  $k$  diferentes. Da esquerda para direita,  $k=1$ ,  $k=\frac{3}{4}$ ,  $k=\frac{1}{2}$ ,  $k=\frac{1}{10}$  e  $k=0$ . Fonte: Autores.

## 7 Exemplos de aplicações

Nessa seção, iremos exemplificar algumas situações em que se aplicam as fórmulas encontradas na seção 3. Como dito anteriormente, a velocidade terminal da chuva é um pouco maior que 30 km/h. Com essa informação, podemos calcular a constante  $k_y$  de uma gota de chuva. Como trata-se de uma queda, a velocidade é negativa, portanto  $v_f$  é aproximadamente  $-31$  km/h:

$$\begin{aligned} -\frac{mg}{k_y} &= -\frac{31}{3,6} \text{ m/s}, \\ k_y &= \frac{3,6mg}{31}, \\ k_y &\approx 0,038 \text{ kg/s}. \end{aligned}$$

Vamos agora supor um cenário em que necessitemos calcular o alcance do tiro de um morteiro posicionado em uma elevação de 15 m no terreno, que dispara munições de 1 kg, que possuem  $k_x = k_y = 1$ , e o cano está com uma inclinação de  $15^\circ$  com o solo, sabendo ainda que a velocidade de saída do projétil é de 360 km/h. Assim:

$$\begin{aligned} x(t) &= 115,91(1 - e^{-t}), \\ y(t) &= 15 - 9,81t + 40,86(1 - e^{-t}), \end{aligned}$$

$$v_y(t) = -9,81 + 40,86(e^{-t}),$$

$$t_p = 1,427,$$

$$t_0 = 1,5.$$

Na Figura 4 abaixo, é possível visualizar a trajetória do projétil do morteiro.

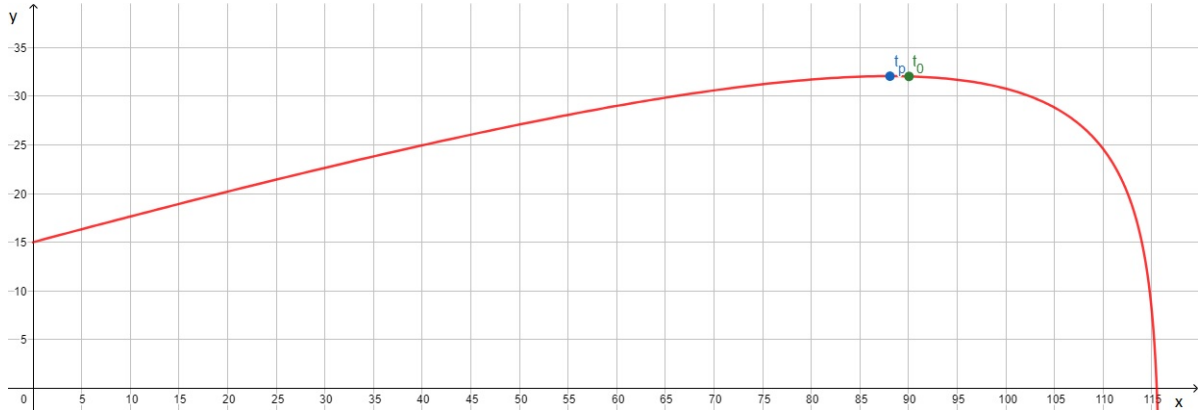


Figura 4: Curva parametrizada em função do tempo ( $x(t)$  e  $y(t)$ ), mostrando a trajetória do projétil do morteiro. No gráfico, temos o ponto  $t_p$  (o da esquerda), e  $t_0$  (o da direita). Fonte: Autores.

Utilizando a fórmula 34, e fixando o erro como  $10^{-6}$ , podemos formar a Tabela 1, composta pela aproximação inicial  $t_0$  e com termos da sequência gerada:

Tabela 1: Aproximação inicial e valores gerados pelas iterações subsequentes

Iteração	t	y(t)
0	1,5	47,72286780
1	47,7228678	-412,30133308
2	5,6941896	-0,13751284
3	5,6799727	-0,00001396
4	5,67997125	0,00000003

Como 0,00000003 é menor que o erro, então consideraremos o tempo de queda  $t_q$  aproximadamente igual à  $t_4 = 5,67997125$  segundos. Para calcular o alcance A do projétil do morteiro, basta usarmos a equação 36, e assim, encontramos que A é aproximadamente 115,5 m.



## 8 Conclusão

Através dos cálculos e das discussões que fizemos acima, pretendemos mostrar um exemplo de utilização de equações diferenciais e do cálculo numérico para resolver um problema de física interessante, e fornecer um trabalho bastante detalhado dos caminhos e técnicas empregados na resolução dos problemas que encontramos, visando dessa maneira auxiliar nos estudos sobre o assunto.

## Referências

- BATTAN, L.J. **Some Observations of Vertical Velocities and Precipitation Sizes in a Thunderstorm**. Journal of Applied Meteorology, Tucson, v. 3, n. 4, 415-420, 1964.
- FREIRE, W.H.C.; MEDEIROS, M.L.; LEITE, D.; SILVA, R.M. **Lançamento oblíquo com resistência do ar: Uma análise qualitativa**. Revista Brasileira de Ensino de Física, São Paulo, v. 38, n. 1, 1306, 2016.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física, Volume 1**. 9ª ed. Rio de Janeiro: Grupo Gen - LTC, 2012.
- RUGGIERO, M.A.G.; LOPES, V.L.R. **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais**. 2ª ed. São Paulo: Makron Books do Brasil, 1996.
- THORNTON, S.T.; MARION, J.B. **Dynamics of Particles and Systems**. 5<sup>th</sup> ed. Belmont: Brooks/Cole, 2004.
- TIPLER, P.A.; MOSCA, G. **Física para cientistas e engenheiros, Volume 1**. 5ª ed. Rio de Janeiro: Grupo Gen - LTC, 2006.
- ZILL, D.G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**. 2ª ed. São Paulo: Cengage Learning, 2012.